تمرینات درس جبرخطی عددی ـ رشته علوم کامپیوتر

مدرّس: حسینی

مهلت تحویل: ۱۴۰۴/۰۳/۰۱

---

۱) دستگاه معادلات خطی

$$x_1 + x_2 = 3,$$
$$-10x_1 + 10^5 x_2 = 10^5,$$

را در نظر بگیرید. جواب این دستگاه را با روش حذفی گاوس در حساب ممیز شناور چهار رقمی و با استفاده از راهکارهای زیر به‌دست آورید:

(الف) محورگیری جزئی؛

(ب) محورگیری جزئی مقیاس شده؛

(پ) محورگیری کامل؛

(ت) جواب دقیق دستگاه را به‌دست آورده و با جواب‌های حاصل از قسمت‌های (الف)-(پ) مقایسه کنید.

۲) فرض کنید A ماتریسی ناتکین و $A^{(k)}$ ماتریس حاصل از به‌کارگیری روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی برای حل دستگاه $Ax = b$ در گام kام باشد. همچنین، فرض کنید

$$A^{(0)} = A, \quad A^{(k)} = \left(a_{rs}^{(k)}\right), \quad a_k = \max_{r,s} \left|a_{rs}^{(k)}\right|.$$

نشان دهید:

(الف) به ازای ماتریس دلخواه A داریم

$$a_k \leq 2^k a_0, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

(ب) به ازای ماتریس سه قطری A داریم

$$a_k \leq 2a_0, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

۳) ماتریس A و بردار b را به صورت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 17 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

در نظر بگیرید.

(الف) توضیح دهید چرا ماتریس A دارای تجزیه LU نیست؛

(ب) با استفاده از محورگیری جزئی و ماتریس جایگشت مناسب P، تجزیه LU برای ماتریس PA بیابید؛

(پ) با استفاده از ماتریس‌های P، L و U جواب دستگاه $Ax = b$ را به‌دست آورید.

۴) تجزیه چولسکی ماتریس خیام-پاسکال مرتبه ۴، یعنی،

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۶ & ۱۰ \\ ۱ & ۴ & ۱۰ & ۲۰ \end{bmatrix},$$

را به‌دست آورید.

۵) اگر $A = (a_{ij})_{۱ \le i,j \le n}$ یک ماتریس اکیداً معین مثبت باشد، نشان دهید همه زیرماتریس‌های اصلی پیشروی مرتبه k آن ناتکین هستند. در مورد درستی یا نادرستی عکس مطلب فوق بحث کنید.

۶) فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس معین مثبت اکید باشد. نشان دهید

(الف) $|a_{ij}| < \frac{a_{ii} + a_{jj}}{۲}$؛

(ب) بزرگترین درایه A (از لحاظ قدرمطلق) روی قطر اصلی قرار دارد.

۷) در هر یک از گزاره‌های زیر استفاده از چه نرمی را پیشنهاد می‌کنید.

(الف) محاسبه مسافتی که از درب ورودی دانشگاه تا کتابخانه مرکزی باید طی کرد.

(ب) محاسبه ارتفاع یک در به‌طوری‌که هر فرد زیر ۱/۶ متر بتواند بدون خم شدن از آن رد شود.

(پ) محاسبه اندازه باقی‌مانده پس از برازش داده‌ها با یک خط مستقیم در تقریب کمترین مربعات

(ت) اطمینان از اینکه همه مولفه‌های یک بردار خطا کمتر از $۱۰^{-۳}$ باشند.

(ث) محاسبه تعداد خانه‌هایی که یک رخ باید برای رسیدن به یک موقعیت خاص در صفحه شطرنج انجام دهد (ممکن است بیش از یک حرکت نیاز باشد).

۸) نرم‌های برداری $\|x\|_۲$ و $\|x^T\|_۱$ و نرم‌های ماتریسی $\|A\|_\infty$، $\|A\|_۱$ و $\|A\|_F$ را برای بردار و ماتریس زیر به‌دست آورید. (۲۰ نمره)

$$x = \begin{pmatrix} -۳ \\ ۲ \\ ۴ \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۴ & ۳ \\ ۳ & -۱ & ۸ \end{pmatrix},$$

۹) فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n$ و $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. نشان دهید

(الف) $\|x\|_۱ \le \sqrt{n}\|x\|_۲ \le n\|x\|_\infty$؛

(ب) $\|A\|_\infty \le \sqrt{n}\|A\|_۲$.

۱۰) نشان دهید ماتریس L روش تجزیه LU برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$L = G_1^{-1} G_2^{-1} \dots G_{n-1}^{-1},$$

که در آن $G_i = I + g_i e_i^T$، ماتریس‌های تبدیل گاوسی، I ماتریس همانی، e_i، iامین بردار یکه استاندارد است و

$$g_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ (g_i)_{i+1} \\ \vdots \\ (g_i)_n \end{pmatrix}, \qquad (g_i)_j = -\frac{a_{ji}^{(i-1)}}{a_{ii}^{(i-1)}}.$$

۱۱) ماتریس A و معکوس آن به‌شکل

$$A = \begin{pmatrix} -0/4 & 1 & -0/8 \\ 1/2 & -2 & 1/4 \\ -0/6 & 1 & -0/2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید.
(الف) $\kappa_1(A)$ را به‌دست آورید.
(ب) فرض کنید $Ax = b$ و $(A + E)\hat{x} = b$ که در آن $\|E\|_1 \leq 0/01$. کرانی برای تفاضل نسبی بین جواب‌های این دو دستگاه تعیین کنید.

۱۲) (الف) روش ژاکوبی برای حل دستگاه $AX = b$ که در آن

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

را بیان کنید.
(ب) نشان دهید

$$u_k = \big(\sin(k\pi h), \sin(2k\pi h), \dots, \sin(nk\pi h)\big)^T, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

که در آن $h = 1/(n+1)$، بردارهای ویژه ماتریس تکرار T_j هستند.
(پ) نشان دهید روش به‌ازای هر تقریب اولیه $x^{(0)}$، همگراست.

۱۳) جواب تقریبی دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} ۲۰x_۱ + x_۲ - x_۳ &= ۱۷, \\ x_۱ - ۱۰x_۲ + x_۳ &= ۱۳, \\ -x_۱ + x_۲ + ۱۰x_۳ &= ۱۸, \end{aligned}$$

را با روش تکراری گاوس–سایدل و با حدس اولیه $x^{(۰)} = (۰, ۰, ۰)^T$ به‌دست آورید (دو تکرار انجام دهید).

۱۴) نشان دهید روش تکراری گاوس–سایدل در مورد دستگاه خطی

$$\begin{aligned} ۲x_۱ - x_۲ + x_۳ &= ۱۳, \\ ۲x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳ &= ۴, \\ -x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ &= -۵, \end{aligned}$$

به ازای هر بردار اولیه $x^{(۰)}$ همگراست درحالی‌که روش تکراری ژاکوبی واگراست.

۱۵) دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} ۳x_۱ + ۲x_۲ &= ۴/۵, \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ - x_۳ &= ۵, \\ -x_۲ + ۲x_۳ &= -۰/۵, \end{aligned}$$

بهترین انتخاب ω برای پیاده سازی روش SOR را بیابید.

۱۶) نشان دهید اگر ماتریس A با تبدیل مشابه $P^{-۱}AP$ قطری شود و B یک ماتریس دلخواه باشد آنگاه مقادیر ویژه $A + B$ در اجتماع دایره‌های

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_k| \leq \kappa_\infty(P)\|B\|_\infty\},$$

قرار دارند که در آن $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ...، λ_n مقادیر ویژه ماتریس A بوده و $\kappa_\infty(P)$ عدد حالت ماتریس P است.

۱۷) نشان دهید همه مقادیر ویژه ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۵ \end{bmatrix},$$

مثبت هستند.

۱۸) (الف) نشان دهید ماتریس انعکاس هاوس–هولدر $H = I - ۲ww^T$ که در آن $\|w\| = ۱$، ماتریسی متقارن و متعامد است.
(ب) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس H را بیابید.

۱۹) جواب مساله کمترین مربعات برای دستگاه

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix},$$

را به‌دست آورید.

۲۰) تجزیه QR ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix},$$

را با استفاده از الگوریتم متعامدسازی گرام–اشمیت به‌دست آورید.

۲۱) یک تجزیه مقدار تکین برای ماتریس زیر بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}.$$

«موفق باشید»