

به نام خدا



تمرینات درس مبانی آنالیز عددی- رشته علوم کامپیوتر  
سری چهارم- انتگرال گیری عددی

مهلت تحویل: ۱۴۰۳/۰۳/۲۲

مدرّس: حسینی

(۱) روش انتگرال گیری عددی نامتقارن

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{12} [5f(a) + 8f(b) - f(2b-a)] + E(f),$$

راکه در آن  $f \in C[a, 2b-a]$ ، در نظر بگیرید. نشان دهید:

(الف) روش برای تمام چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه دو دقیق است.

(ب) برای  $f \in C^3[a, 2b-a]$ ، داریم

$$E(f) = \frac{(b-a)^4}{24} f'''(\xi), \quad \xi \in [a, 2b-a].$$

(۲) برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرال  $\int_0^1 e^{x^2} dx$  با قاعده

(الف) ذوزنقه‌ای مرکب،

(ب) سیمپسون مرکب،

و با دقت  $\varepsilon = 10^{-6}$ ، بازه  $[0, 1]$  حداقل به چند زیربازه باید تقسیم شود؟

(۳) معادله

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 0.45,$$

را می‌توان با استفاده از روش نیوتن حل کرد. بدین منظور، فرض کنید

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt - 0.45,$$

با توجه به ضابطه تابع  $f$ ، برای محاسبه آن در  $p_k$ ، باید از یک روش انتگرال‌گیری عددی برای تقریب انتگرال

$$\int_0^{p_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt,$$

استفاده کرد.

تقریبی از ریشه معادله  $f(x) = 0$  را با استفاده از روش نیوتن و قاعده سیمپسون مرکب با دقت  $10^{-5}$  به دست آورید. مقدار اولیه را برابر  $p_0 = 0.5$  اختیار کنید.

(۴) ضرایب  $w_0$ ،  $w_1$  و  $w_2$  را طوری تعیین کنید که فرمول انتگرال‌گیری

$$\int_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} \approx w_0 f(0) + w_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + w_2 f(1),$$

دارای بالاترین درجه دقت باشد. سپس، با استفاده از آن تقریبی برای انتگرال زیر ارائه دهید

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}.$$

(۵) با استفاده از نسخه مرکب فرمول انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر دو-نقطه‌ای تقریبی برای انتگرال

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 (\sin x + 5 \ln x + e^{x^2}) dx,$$

به دست آورید در صورتی که بازه  $[\frac{1}{4}, 1]$  به پنج زیربازه مساوی تقسیم شود.

«موفق باشید»